

El Concepto de Complejidad Como Criterio de Diseño en Ingeniería Mecánica¹

Jorge Angeles

Departamento de Ingeniería Mecánica y
Centre for Intelligent Machines
McGill University, Montreal, Canadá

Abstract

Se discute el concepto de complejidad como criterio de diseño en ingeniería mecánica en particular; pero éste puede extenderse a otros campos de la ingeniería. Se incluye una caracterización de los pares cinemáticos inferiores en términos de complejidad, ordenándolos del más simple al más complejo. Los conceptos se ilustran con ejemplos de diseño en el campo de la robótica.

1 Introducción

La palabra *diseño* proviene del latín “designare”, que debe interpretarse en el contexto técnico como “designar un objeto para un fin determinado”. El objeto puede ser un producto o un servicio. Aquí nos limitamos a los productos técnicos.

El diseño es una actividad muy amplia, con diversas manifestaciones. En orden ascendente de contenido técnico, tenemos: *arte*; *diseño gráfico*; *diseño industrial*; *diseño de arquitectura*; y *diseño de ingeniería*. Los tres últimos pueden englobarse en un solo término, *diseño técnico*.

El diseño de ingeniería es una actividad presente en todo proyecto técnico. El diseño que nos ocupa depende de conceptos subjetivos, tales como procesos intelectuales. Aunque se ha intentado formalizar el diseño de ingeniería como ciencia, la aparición de varias escuelas al respecto indican que una teoría pertinente está todavía en ciernes, clamando por trabajo de investigación que permita establecer sus bases teóricas en un marco ampliamente aceptable.

Este trabajo es un intento por establecer las bases de una teoría del diseño de ingeniería. Tal teoría debe cimentarse en *principios de diseño*, comunes a todas las actividades de ingeniería, independientes de los detalles propios de cada disciplina. En otras palabras, los principios del diseño técnico, cualesquiera que éstos fueren, deben ser aplicables tanto al diseño de un puente de Wheatstone como al de un puente de piedra, al de un filtro de café como al de un filtro de pasa-baja. Esta es la motivación detrás de este trabajo.

2 Sobre la Naturaleza del Diseño

El diseño en general tiene por objeto la satisfacción de una necesidad humana. En su forma más sublime, el arte, la necesidad humana es intelectual; en su forma más pragmática, la

¹La primera parte de este trabajo es una adaptación actualizada de (Khan y Angeles, 2007).

necesidad humana es física. En todo trabajo de diseño se encuentra siempre un *cliente*, que somete su necesidad al diseñador, sea éste un individuo o un equipo. Es muy raro que un solo individuo sea capaz de emprender y llevar a feliz término un trabajo de diseño.

El diseño, en suma, es una actividad compleja que echa mano de la creatividad, del conocimiento tanto científico como técnico, y de habilidades interpersonales (trabajo en equipo, comunicación, etc.). Debido a su complejidad, los investigadores del proceso de diseño han ideado modelos pertinentes. Los tres más frecuentemente citados son debidos a French (1992), a Pahl y Beitz (2007) y a la VDI². En la Fig. 1 se muestra un diagrama de flujo del modelo debido a Michael French. Semejantes diagramas para los otros dos modelos se pueden consultar en el libro de Pahl y Beitz arriba citado.

En el modelo de French se pueden identificar cuatro etapas principales en el proceso de diseño, a saber:

1. **Análisis del Problema:** En esta etapa, llamada *clarificación de la tarea de diseño* por la Escuela Alemana, la necesidad que motivó el trabajo de diseño se analiza en consulta con el cliente; en seguida, se formula la necesidad en términos de *funciones* y de *subfunciones*. Se incluyen en esta etapa condiciones más precisas, que constituyen las *especificaciones de diseño*. Una vez que se ha analizado el problema de diseño, se llega a una formulación del problema que satisfaga al cliente.
2. **Diseño Conceptual:** Aquí se produce una rica variedad de soluciones potenciales al problema de diseño mediante métodos de dinámica de grupos, tales como tormentas de ideas, sinéctica, TRIZ³, etc. Finalmente, esta variedad se analiza en detalle hasta llegar a un conjunto reducido de alternativas candidato, que tengan la más alta probabilidad de satisfacer todas las especificaciones de diseño, respetando siempre las restricciones de presupuesto y los plazos de entrega.
3. **Realización:** Las alternativas identificadas en la primera etapa se concretizan en forma de bocetos y dibujos preliminares de diseño. A continuación se introducen varios criterios para evaluar estas alternativas y decidir cuál de ellas es la que se llevará a la etapa siguiente. En trabajos complejos, como el diseño aeronáutico, se produce un modelo paramétrico de la alternativa seleccionada, con propósitos de análisis, muy probablemente mediante elementos finitos y, finalmente, se utilizan estos modelos para fines de optimización.
4. **Diseño de Detalle:** Una vez que el equipo de diseño ha producido una realización aceptable del objeto diseñado, todas las piezas que constituyen el objeto se diseñan en todo detalle, o bien se seleccionan de catálogo, como es el caso en componentes estándar, v. gr. rodamientos, tornillos y motores. El producto final es una *Memoria de Diseño*, que contiene: un resumen de la necesidad que motivó el trabajo; todas las soluciones alternativas consideradas, con la lógica que llevó a seleccionar aquella que se realizó; planos de fabricación; lista de materiales; gráficos de curvas de operación obtenidas mediante simulación; presupuesto estimado para la producción del objeto diseñado; y toda clase de información necesaria para fabricar el objeto.

² *Verein Deutscher Ingenieure*, Asociación de Ingenieros Alemanes, en castellano (1993)

³ Siglas en ruso de *Teoría Para la Solución Creativa de Problemas*.

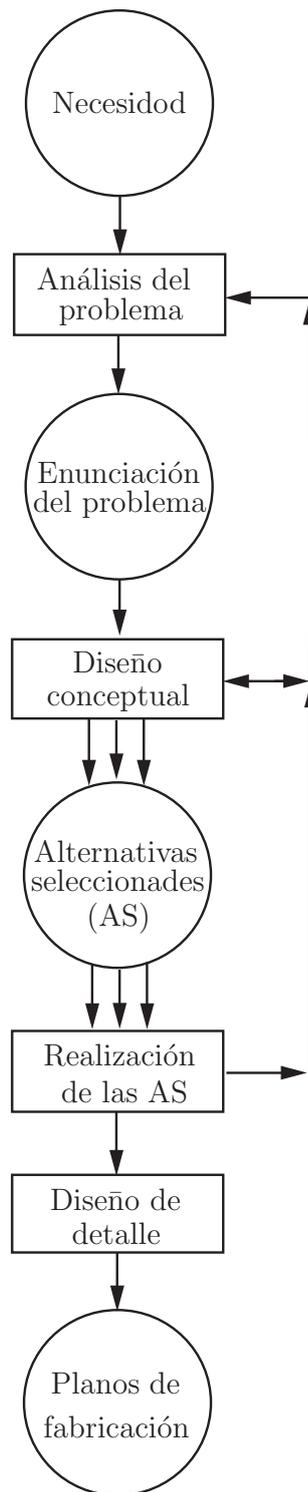


Figure 1: Modelo del proceso de diseño según French (1999)

Es evidente que, al principio, en la etapa de diseño conceptual, no se dispone de un modelo matemático. Este será posible una vez que se tenga la realización del diseño. En la etapa conceptual sólo se dispone de reglas empíricas del tipo **si ... , entonces**. Estas reglas son empíricas porque se basan más bien en el sentido común y la experiencia, que en sólidos conocimientos científicos o técnicos.

A través de los años se han desarrollado reglas para guiar al ingeniero en la etapa conceptual del diseño. Estas se han propuesto en forma de principios que son aplicables a todo trabajo de diseño técnico, independientemente de la disciplina. Se pueden citar tres principales escuelas en este sentido: la Escuela Alemana; el Diseño Robusto; y el Diseño Axiomático.

La Escuela Alemana está altamente desarrollada, con lineamientos sancionados por la VDI. El diseño robusto tiene su origen en los trabajos del ingeniero japonés Genichi Taguchi, que estableció la ingeniería robusta. El paradigma de Taguchi se basa en conceptos de la ingeniería de telecomunicaciones, siendo Taguchi ingeniero en esta área. Bien que Taguchi hubiera propuesto su paradigma en los años cincuenta, éste permaneció virtualmente desconocido fuera del Japón, hasta que se tradujeron sus trabajos al inglés a principios de los años ochenta. El diseño robusto, fruto de los trabajos de Taguchi, aspira a maximizar la relación señal/ruido, donde los dos conceptos deben medirse en términos de la entropía de los mensajes que hacen las veces de señal y de ruido. Aquí, señal se refiere a la información sobre el objeto diseñado, en tanto que ruido, a la cantidad de incertidumbre en los parámetros que definen el medio ambiente en el que operará el objeto. El diseñador no tiene ningún control sobre estos parámetros. Taguchi introdujo una herramienta para poder evaluar una alternativa de diseño: la función de pérdida, que mide la pérdida económica que sufre un segmento de la población como consecuencia de un diseño fallido.

En fin, el diseño axiomático fue propuesto por el entonces profesor del MIT Nam P. Suh (1990). El paradigma de Suh se basa en dos “axiomas” principales⁴:

Axioma 1: Independencia Funcional. Mantened la independencia de los requisitos de funcionalidad. En otras palabras, satisfacéd una función con un solo satisfactor; y

Axioma 2: Contenido Mínimo de Información. Minimizad el contenido de información en el objeto de diseño. En este sentido, Suh utiliza la medida de información propuesta por Shannon en su célebre trabajo sobre la Teoría Matemática de las Comunicaciones (TMC) (Shannon and Weaver, 1998).

Los paradigmas de Taguchi y de Suh se basan en el concepto de entropía, propio de la TMC. Este concepto, propuesto originalmente por Rudolf Clausius (1822–1888) en 1865 en el ámbito de la Termodinámica, en realidad va más allá de la física, según lo mostró Shannon en su trabajo arriba citado. Clausius introdujo el concepto en un trabajo fundamental que esclareció la naturaleza de la *Segunda Ley de la Termodinámica*. Según Clausius, “si un sistema termodinámico *aislado* se deja solo, su entropía no puede más que aumentar”.

En virtud del papel fundamental del concepto de entropía dentro de la teoría del diseño, se discute este concepto en el ámbito de la termodinámica y de la teoría matemática de las comunicaciones. Al hacer esto, se introduce el concepto de *complejidad* en el diseño.

⁴un término más apropiado sería “principios”.

3 El Concepto de Complejidad

Al formular su *primer axioma*, Suh comienza por definir los *requerimientos funcionales* (RF) y los *parámetros de diseño* (PD), que el diseñador debe determinar. En el siguiente paso, Suh *presupone* una *relación lineal* entre estos dos conceptos, relacionados por una *matriz de diseño*, que, según Suh, debería ser cuadrada. Esto es equivalente a suponer que el número de RF, representado aquí por N_{RF} , es igual al de PD, representado por N_{PD} . Sin embargo, Suh también acepta matrices rectangulares; pero llama “ideal” una tarea de diseño en la que los dos números son iguales. En el mismo orden de ideas, Suh llama diseño acoplado a uno en el que $N_{PD} < N_{RF}$. En contraposición al diseño acoplado, Suh define el *diseño redundante* como aquél en el que $N_{PD} > N_{RF}$.

En cuanto a la definición de contenido de información, Suh recurre al concepto de entropía introducido por Shannon (Shannon y Weaver, 1998):

$$H = - \sum_1^n p_i \log(p_i), \quad \sum_1^n p_i = 1 \quad (1)$$

donde $\log(p_i)$ es el logaritmo de p_i en una base cualquiera, en tanto que p_i es la *probabilidad* de transmisión de una letra en un alfabeto, al componer un mensaje. Haciendo abstracción de la constante de Boltzmann en la ec.(1) y utilizando logaritmos naturales, la expresión anterior coincide con la de Boltzmann. Ahora bien, mientras que en Termodinámica se prefiere la base e de los logaritmos naturales, en la Teoría de la Comunicación se prefiere la base 2, que da lugar a los logaritmos binarios, en los que H se mide en bits (contracción de “binary digits” en inglés); en la base e , H se mide en *nats*; en la base 10, en *decibeles*. La utilización de logaritmos en la definición de entropía es importante porque éstos le dan un *carácter aditivo* al concepto de entropía. Esto quiere decir que, si un mensaje se descompone en submensajes, la entropía del mensaje es igual a la suma de las entropías de los submensajes. En realidad, la transmisión de una sola palabra puede descomponerse en simples submensajes: cada letra transmitida puede verse como un submensaje de una entropía dada, que puede calcularse fácilmente.

La razón por la que la base 2 se prefiere en la TMC yace en el concepto de selección binaria y en la observación de que todo proceso de selección, independientemente de la naturaleza del proceso y del número de alternativas, el proceso se puede reducir a una selección binaria. De hecho, una interpretación de la cantidad H en la ec.(1) es como medida de la cantidad de ambigüedad en un mensaje. En castellano, al transmitir un mensaje por teléfono, si se deletrea un nombre poco común, hay ambigüedad, por ejemplo, entre “A” y “K”; entre “B”, “C”, “D”, “E”, “G”, “P” y “T”; entre “F” y “S”; y entre “M” y “N”. Si el nombre es algo como “Guatimos”, utilizando la ortografía de Hernán Cortés al transcribir el nombre del último emperador azteca (Cuauhtémoc, con la ortografía mexicana oficial), hay ambigüedad en la primera (G), la tercera (A), la cuarta (T), la sexta (M) y la última (S) letras. Si el contenido de información de cada una de estas letras se calcula en la forma dada en la ec.(1), como $-p_i \log(p_i)$, se obtiene, por ejemplo, que la probabilidad de escoger correctamente “G”, lo mismo que “T” es 1/7, pues hay siete posibilidades en cada caso; la de escoger correctamente “A”, “M” o “S” es 1/2 en cada caso, pues hay dos posibilidades. Con una

alpha	hotel	Oscar	Victor
bravo	India	papa	whiskey
Charlie	Juliett	Quebec	xray
delta	kilo	Romeo	yankee
echo	Lima	sierra	zulu
foxtrot	Mike	tango	
golf	November	uniform	

Table 1: El Alfabeto Internacional

notación obvia se tiene, entonces, para “G” o “T”,

$$H_G = H_T = - \sum_1^7 \frac{1}{7} \log_2\left(\frac{1}{7}\right) = 0.4011 \times 7 = 2.8770$$

en tanto aue, para “A”, “M” o “S”,

$$H_A = H_M = H_S = - \sum_1^2 \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times 0.5 = 1.0$$

El contenido de ambigüedad para las otras letras es cero. Por lo tanto, la transmisión del mensaje “Guatimos” por teléfono es la suma de los valores anteriores:

$$H_{\text{Guatimos}} = 2 \times 2.8770 + 3 \times 1.0 = 8.7540 \text{ bits}$$

Cherry (1982) publicó una extensa discusión sobre la aplicación de la TMC al lenguaje.

Como remedio para combatir la ambigüedad luego de la transmisión fonética de *zwei* (dos) y *drei* (tres), los alemanes inventaron la palabra *zwo* para ser utilizada en lugar de *zwei*. Igualmente, para evitar la ambigüedad entre la “u” y la “n”, o entre la “w” y la “m” manuscritas, los alemanes utilizan una raya horizontal *sobre* la “n” y la “m”, con algo semejante *bajo* la letra correspondiente en el caso de la “u” y la “w”.

Por su parte, la *Organización de Aviación Civil Internacional* (OACI) introdujo en los años de la posguerra—posteriores a la Segunda Guerra Mundial—su *Alfabeto Internacional*, con el fin de evitar las ambigüedades en las comunicacines por viva voz mediante un canal ruidoso. El ruido del canal se amplifica mediante el sistema vocal de los interlocutores, especialmente al hablar una lengua extranjera, o al hablar cuando se padece de un resfrío. En la Tabla 1 se muestra el Alfabeto Internacional.

En los casos anteriores, si se utiliza el Alfabeto Internacional para deletrear *Guatimos* hay ocho letras a transmitir por teléfono, cada una de las cuales se puede escojer, al momento de interpretar el mensaje, como una sola, sin ambigüedad, por lo que la probabilidad de selección de cada letra es 1. En este caso cada uno de los sumandos de la ec.(1) contiene el factor $\log(p_i)$, que es 0, pues no hay ambigüedad en ninguna letra, y la probabilidad de escoger la correcta es 1. El contenido de información en la transmisión del mensaje es, por lo tanto, 0.

En el contexto del diseño, Suh propone interpretar p_i en la ec.(1) como la *probabilidad de cumplir con una tolerancia*. Sin embargo, en la etapa conceptual del diseño no se tiene a

la mano un modelo paramétrico del objeto de diseño, por lo que se carece de dimensiones y, en consecuencia, de tolerancias.

Lo que se propone aquí es considerar la entropía de un *concepto solución* al problema de diseño como la *complejidad* del concepto. Para esto, se equiparará la complejidad del concepto a su *diversidad*, donde esta última se refiere a la variedad de, por ejemplo, los medios de accionamiento (mezcla de motores eléctricos con accionadores neumáticos, hidráulicos, etc.) o de los tipos de las articulaciones (mezcla de pares de revolución, prismáticos, esféricos, etc.). En otras palabras, mientras más diverso es un concepto, menos unidad contiene. Con el objeto de cuantificar la diversidad de un concepto solución, se recuerdan algunos conceptos de la metodología del diseño:

Función: Toda tarea impuesta por la necesidad a satisfacer, por ejemplo, sujetar, separar, sostener, transportar, energizar, accionar, captar, etc.

Satisfactor: Elemento o arreglo de elementos destinado a realizar una función (Pahl et al., 2007), por ejemplo: un perno, un tornillo o un cordón de soldadura, que sirven para realizar la función *sujetar*. Cualquiera de estos elementos es un satisfactor de esta función.

Especificación de diseño: Condición cuantitativa que debe ser satisfecha por el objeto de diseño. Ejemplo: Un sistema para transporte de personas y de materiales a lo largo de una distancia de 500 m, que debe dar servicio a 1000 personas/h y transportar mercancía a razón de 100 ton/h.

En general, toda función tiene subfunciones. Por ejemplo, la función separar puede tener la subfunción *permitir rotación relativa entre dos árboles adyacentes con respecto a un eje común*.

Suponiendo que una función F contenga N subfunciones f_1, f_2, \dots, f_N , tal que f_i sea realizada por un número ν_i de satisfactores idénticos S_i , el número total N_S de satisfactores de F es

$$N_S = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N \quad (2)$$

Ahora denotemos con ϕ_i la *frecuencia* con la que aparece el satisfactor S_i , a saber:

$$\phi_i = \frac{\nu_i}{N_S}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

de donde

$$\sum_1^N \phi_i = 1 \quad (4)$$

En estas condiciones, ϕ_i en las ecs.(3) y (4) hacen las veces de la probabilidades p_i en la ec.(1).

Ahora podemos definir una *diversidad* en la alternativa-solución al problema de diseño dado como equivalente a la entropía en la ec.(1). Se justifica entonces referirse a esta diversidad como la *complejidad K de la alternativa*, o sea,

$$K = - \sum_1^N \phi_i \log_2(\phi_i) \quad (5)$$

Cabe mencionar que la fórmula de Shannon, ec.(1), es una aproximación al número combinatorio correspondiente, tal como aparece en la termodinámica estadística (McQuarrie y Simons, 1999). Esta aproximación, que se basa en la *fórmula de Stirling*, es muy precisa para valores “grandes” de N , como el número de partículas en sistemas termodinámicos, del orden del número de Avogadro, 6.022×10^{23} . Los números N_S de satisfactores en una tarea de diseño son relativamente pequeños, del orden de 10 para los casos más frecuentes, de 10^5 para un objeto tan complejo como un avión. No obstante, la fórmula de Stirling da un error relativamente pequeño, de alrededor de un 14%, para números del orden de 10 (McQuarrie y Simons, 1999), por lo que se puede adoptar libremente en el ámbito de la teoría del diseño.

Considérese un ejemplo concreto de diseño:

Diseñar un vehículo autónomo capaz de transportar lotes de chapa de madera en una planta de producción.

Después de una sesión de tormentas de ideas, el equipo de diseño produjo varias alternativas para la solución de este problema. Como fruto de las subsecuentes deliberaciones, se acordó adoptar un robot rodante con tres ruedas convencionales, por contraposición a las ruedas *omnidireccionales*, que consisten en un tambor con una serie de rodillos en su periferia, con ejes inclinados con respecto al eje del tambor, y que permiten a un vehículo una movilidad con tres grados de libertad. Se acordó también que las ruedas fueran idénticas, para disminuir la diversidad. Se acordó igualmente que el vehículo fuera programable ya sea en diferido o en tiempo real, por lo que los motores estarían gobernados por ordenador. Con ruedas convencionales, el vehículo tiene una movilidad de 2, pues cada rueda puede moverse ya sea en línea recta o en viraje.

De la discusión anterior se evidencia que el vehículo necesitará dos motores, lo que lleva a la discusión, en la fase del diseño conceptual todavía, sobre dónde colocar los dos motores. Esto es, de las tres ruedas, cuáles son las dos motrices. También cabe considerar que en un triciclo dos de las ruedas tienen que estar montadas en árboles coaxiales, con sus ejes fijos al chasis, por lo que estas dos ruedas sólo pueden accionarse en una dirección, la de su eje; pero no alrededor de un eje normal a éste. La tercera rueda sí puede accionarse con dos grados de libertad. Además, esta rueda puede estar centrada o decentrada. En suma, se tienen varias alternativas de accionamiento, como se ilustra en la Fig. 2.

De la Fig. 2 se desprende que la selección del modo de actuación se reduce a dos alternativas con tercera rueda o centrada o decentrada. Si centrada, o dos motores diferentes o dos motores idénticos; si decentrada, o una sola rueda coaxial accionada o las dos accionadas. La primera solución de rueda decentrada no puede llevar a dos motores idénticos. En consecuencia, las dos soluciones más simples son: 1) 3a. rueda centrada accionada con dos motores idénticos y 2) 3a. rueda decentrada pasiva, con dos motores idénticos en las dos coaxiales. El autor propuso (Angeles, 2005) una realización de la segunda alternativa usando dos ruedas coaxiales que dan lugar a un sistema de tracción cinemáticamente equivalente a una sola rueda.

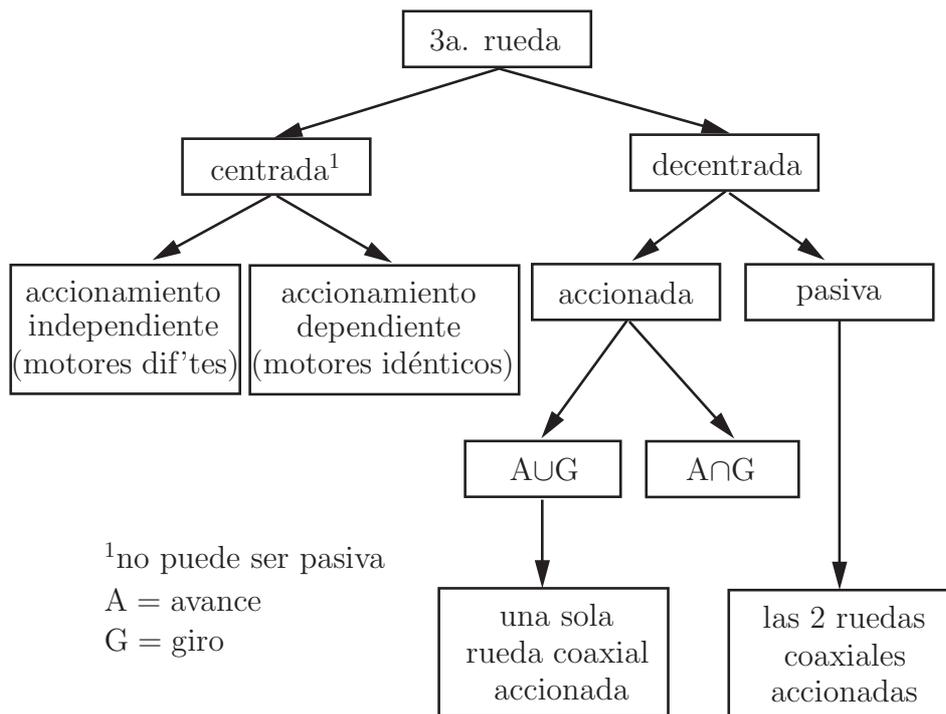


Figure 2: Alternativas de accionamiento para un triciclo autónomo

4 Complejidad de las Cadenas Cinemáticas

Dado que el concepto de complejidad es *relativo*, al determinar la complejidad de una alternativa-solución se normalizarán los valores de complejidad obtenidos, de manera tal que cada valor se encuentre en el intervalo $[0, 1.0]$.

Un problema fundamental en el diseño de máquinas es la selección de los pares cinemáticos que se utilizarán en las articulaciones, pues se sabe (Hartenberg and Denavit, 1964) que existen exactamente seis pares cinemáticos inferiores: de revolución (R), prismático (P), helicoidal (H), cilíndrico (C), plano (F, del alemán “Fläche”) y esférico (S, del inglés “spherical”). De éstos, los tres primeros permiten un movimiento relativo de un solo grado de libertad (g.d.l.); el cuarto, uno de dos g.d.l., en tanto que los dos últimos permiten uno de tres g.d.l. Por esta razón, los tres primeros se denominan *pares cinemáticos inferiores simples*, los otros tres, *pares cinemáticos inferiores compuestos*. Cabe recordar que los pares cinemáticos inferiores (PCI) se distinguen de otros pares cinemáticos, tales como los acoplamientos entre engranajes o entre leva y seguidor, en que el acoplamiento entre dos eslabones vecinos de la cadena cinemática en cuestión se realiza mediante la acción *envolvente* de un eslabón con respecto al otro. Esto es, a cada PCI se puede asociar una superficie común a los dos eslabones. Esta se denominará *superficie envolvente*.

La razón por la cual hay sólo tres PCI simples yace en que sólo hay tres clases de superficies que tienen un *grupo de simetría* propio (no vacío), a saber, las cilíndricas, las de revolución y las helicoidales (Gfrerrer et al., 2011). Sus grupos de simetría se definen

como los desplazamientos bajo los cuales la superficie permanece *inmutable*. Gferrer y sus co-autores, en el trabajo arriba citado, se refieren a estas superficies como “superficies que se pueden mover en sí mismas”. Los grupos en cuestión son subgrupos del grupo de Lie de desplazamientos del cuerpo rígido, según los estudios de Hervé (1999).

Uno de los primeros problemas que debe enfrentar el diseñador de máquinas es decidir sobre el tipo de PCI a utilizar, una vez, desde luego, que se hubiere decidido utilizar un PCI y no un tren de engranajes o un acoplamiento por levas. Por ejemplo, para realizar la función “abrir o cerrar una puerta” se dispone fundamentalmente de dos alternativas, puerta con bisagras o puerta con corredera. Un diseñador experto preferirá la primera solución, debido a que las bisagras son más inmunes al polvo y al envejecimiento. En la teoría del diseño es deseable racionalizar esta decisión y determinar de una vez por todas por qué, en ausencia de otros criterios o de restricciones en la selección, un par R es preferible a un par P. Lo que hemos propuesto recientemente (Khan y Angeles, 2011) es una medida de *complejidad* que se pueda asociar a los seis PCI. A continuación se presenta una breve descripción de este concepto.

Para empezar, sólo se consideran los tres PCI simples; la complejidad de los otros tres se asigna al representarlos como cadenas cinemáticas compuestas de PCI simples. Ya que a cada PCI se puede asociar una *superficie envolvente*, la complejidad se define en función de esta superficie. Sin embargo, esta superficie no es única, pues la asociada con el par R debe ser de revolución; pero no debe permitir el deslizamiento. Por el contrario, la superficie asociada al par P debe ser una superficie de extrusión; pero debe impedir la rotación. Por lo consiguiente, la superficie asociada con el par R debe ser de revolución; pero no de extrusión; la asociada con el par P debe ser lo contrario. En consecuencia, hay una infinidad de superficies envolventes para los pares R y P. Por otra parte, la superficie asociada con el par H debe ser helicoidal, de paso constante. Así las cosas, la pregunta siguiente es cómo asociar una medida de complejidad a una superficie de las clases anteriores. Esta pregunta se responde con el concepto de *función de pérdida* debido a Taguchi. Más aún, las tres clases de superficies de interés son del tipo *generadas*, en el sentido de que admiten una *generatriz* y una *directriz*. La generatriz es una curva plana Γ cerrada, a la que se asocia una *pérdida de regularidad* (PR), definida al compararla con un círculo de tamaño arbitrario. Puesto que el círculo es una forma “perfecta”, su PR es 0. Lo que define su “perfección” no es su tamaño, sino su forma, que es de *curvatura constante*. Toda desviación de esta propiedad conlleva una pérdida de regularidad. Por esta razón se define la PR como el cociente entre el valor cuadrático medio de los cambios de curvatura y el valor correspondiente de la curvatura misma, a saber:

$$PR \equiv \frac{\kappa'_{\text{rms}}}{\kappa_{\text{rms}}} \quad (6)$$

donde

κ_{rms} : valor cuadrático medio de la curvatura de Γ

κ'_{rms} : valor cuadrático medio de $\kappa'(\sigma)$, la derivada de $\kappa(\sigma)$ con respecto a σ

σ : parámetro adimensional definido como s/L

s : longitud del arco sobre Γ desde un punto de referencia hasta un punto arbitrario P

L : longitud del perímetro de Γ

De la definición de PR se desprende que, si una superficie contiene una *singularidad*, es decir, una región (un punto o una curva) en la que su normal tenga una discontinuidad, la PR correspondiente se vuelve infinitamente grande. En consecuencia, sólo superficies *suaves* se considerarán a continuación.

En el resto de esta sección se resumen las medidas de complejidad asignadas a los seis PCI. Khan y el autor publicaron recientemente una discusión detallada sobre el tema (Khan y Angeles, 2011).

4.1 Complejidad de los PCI Simples

El punto clave en la determinación de la curva generatriz es que, dadas las condiciones arriba expresadas, debe ser la más simple. Para el par R, la curva debe ser suave e impedir deslizamiento, lo cual quiere decir que una línea recta, horizontal o inclinada, no es aceptable. Si horizontal, generará una superficie cilíndrica, que es de revolución; pero permite deslizamiento, ya que esta superficie está dotada con doble simetría, de revolución y de extrusión. En orden ascendente de complejidad, la próxima curva candidata es una curva algebraica plana (curva que tiene un número finito n de intersecciones con una recta); de éstas, las más simples son las gráficas de polinomios $y = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n . La curva debe poder fusionarse *suavemente* con una recta horizontal generadora de un cilindro, sin cambios bruscos en la curva misma, en su tangente o en su curvatura, en dos puntos separados una distancia finita; esto último, para permitir la realización del par R mediante un elemento mecánico (perno, árbol, rodamiento, etc.). Estas condiciones llevan de inmediato a un polinomio par de sexto grado, a saber,

$$y = -x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 \quad (7)$$

que se anula, junto con sus dos primeras derivadas, en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, cumpliendo así con todas las condiciones del caso. La superficie en cuestión se obtiene cuando la curva que representa al polinomio se gira alrededor de un eje que se encuentra a una distancia r , “por debajo” de la curva. Ya que el máximo de $P(x)$ en el intervalo $[-1, +1]$ es 1.0, y se encuentra en $x = 0$, resulta que la PR de la superficie de revolución resultante depende de r . El valor de r que minimiza la PR es $r = 0.1132$, que da un valor PR = 10.3. Esta superficie, aunque parezca abierta, se puede considerar cerrada si el cilindro con el que se fusiona se imagina de extensión ilimitada.

El par P se genera mediante la extrusión de una curva cerrada plana de mínima complejidad. De entrada, el círculo queda descalificado porque da lugar, nuevamente, a una superficie cilíndrica de doble simetría, que permite, por ende, rotación y traslación. Una curva candidata sería una elipse, la pregunta inmediata sería de qué excentricidad, que puede ir de cero, para el círculo, a infinito, para un segmento de recta. Las curvas siguientes, en orden ascendente de complejidad, son las superelipses, o curvas de Lamé, de grado par (las de grado non son abiertas). De éstas, la más simple, fuera del círculo, es la de cuarto grado:

$$x^4 + y^4 = 1 \quad (8)$$

Esta curva, al ser extruida, genera una superficie de simetría de extrusión, naturalmente, cuya PR depende sólo de la PR de la propia curva, a saber, 19.6802, que viene siendo casi el doble de la PR de la superficie asociada con el par R. Esta diferencia constata que el par R sea preferido por los diseñadores cuando existe la posibilidad de escoger.

La helicoides asociada al par H se obtiene al someter una curva plana a una *extrusión helicoidal*, es decir, cuando la curva se gira alrededor de un eje en su plano; al mismo tiempo que se gira, se desliza la curva en una dirección paralela al eje de rotación, que resulta hacer las veces la directriz de la extrusión. La curva plana, obviamente, debe ser de mínima complejidad, lo que nos lleva de inmediato a escoger la gráfica del polinomio de la ec.(7). Esta curva se monta sobre un cilindro de radio r , todavía por determinar. Un parámetro adicional por determinar es el paso p de la hélice. Luego de un estudio encaminado a hallar el valor óptimo de las relaciones p/λ , donde λ es la “longitud de onda” de la generatriz, que se definió anteriormente como 2.0 para el par R, se llegó a las relaciones óptimas de $p/\lambda = 1.0$ y $p/r \approx 4.87$, que conducen a un valor mínimo de $PR = 15.87017$.

En suma, al ordenar los PCI simples en valores ascendientes de su PR, se tiene: R, con $PR = 10.3$; H, con $PR = 15.9$; y P, con $PR = 19.7$.

4.2 Complejidad de los PCI Compuestos

Aunque se pueden asociar superficies envolventes a los pares C, F y S, la simplicidad de estas superficies, cilíndrica, plana y esférica, conduce a valores de PR demasiado bajos, que no están de acuerdo con la complejidad que ocurre al realizar mecánicamente estas superficies, por ejemplo, con una máquina-herramienta. En esta virtud, se adopta en este caso un enfoque diferente. Se descomponen estos PCI en cadenas cinemáticas compuestas de PCI simples. En caso de opciones múltiples, se selecciona, desde luego, la más simple.

El par C puede realizarse mediante la concatenación de dos de los tres PCI simples, indistintamente del orden. Sin demasiado análisis, se puede concluir que la combinación más simple será la RH (o HR). Esta combinación da lugar a una $PR = 29.9801$.

La realización del par F se puede efectuar de varias formas, a saber: RRR, PRR, RPR, RRP, PPR, PRP y RPP, con los pares R de ejes paralelos y los pares P de dirección normal a los ejes de los pares o del par R en cuestión. Ya que la PR de los pares R es menor que la de los pares P, escogemos la combinación RRR para la realización del par F, que lleva a una $PR = 30.9$.

El par esférico, en fin, no admite más que una realización, esto es, por medio de una cadena RRR de ejes concurrentes en el mismo punto, que se denomina el *centro del par S*. Para este par, entonces, se tiene $PR = 3 \times 10.3 = 30.9$.

Para normalizar las PR de los tres PCI compuestos, se dividen las PR entre el máximo valor, de 30.9, con lo que se obtienen los valores de complejidad de 0.9702, 1.000 y 1.000 para los pares C, F y S, respectivamente. Estos valores se denominan *complejidad de forma*.

Sin embargo, la PR no es suficiente para caracterizar la complejidad de los PCI compuestos. Debe considerarse, además, la complejidad de ensamble, pues el par C requiere que el eje del par R sea paralelo a la dirección del par P. Puesto que el par P no tiene, propiamente dicho, un eje, sino sólo una dirección, la única condición que debe cumplir este par en relación con su ensamble es que el vector unitario paralelo al eje del par R sea paralelo al vector unitario que da la dirección del par P. Esta relación se expresa como la anulación del

producto vectorial de los dos vectores unitarios; este producto requiere, para su cálculo, un total de seis operaciones de punto flotante (OPF).

Siguiendo con la misma tónica, el par plano requiere el paralelismo de tres ejes, que se reduce a dos condiciones, a saber, que el primero sea paralelo al segundo y que el segundo lo sea al tercero. Dos condiciones independientes de paralelismo consumen, entonces, $2 \times 6 = 12$ OPF.

Finalmente, el par S requiere que los ejes de los tres pares R sean concurrentes en el mismo punto. Sea, por ejemplo, O el punto de concurrencia, en tanto que P_i , de vector de posición \mathbf{p}_i , un punto de la línea \mathcal{L}_i , y \mathbf{e}_i el vector unitario paralelo a la misma línea. La condición pertinente es

$$\mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

que conlleva a tres condiciones semejantes. Puesto que cada una consume 6 OPF, el total requiere 18 OPF.

La complejidad de ensamble de cada uno de los tres pares, entonces, se puede medir en términos de la complejidad computacional de representación de la condición geométrica asociada a cada par, pues estas condiciones tienen que observarse al programar la máquina herramienta que se utilizará para fabricar cada par. Al normalizar el número de OPF, de manera que el número máximo lleve a una complejidad de 1.0, se obtienen las tres complejidades de ensamble $1/3$, $2/3$ y 1.0 para los pares C, F y S, respectivamente.

La *complejidad de tipo* de los tres PCI compuestos se define ahora como el promedio de las dos complejidades anteriores, la de forma y la de ensamble, lo cual da los valores de 0.6518, 0.8333 y 1.000 para los pares C, F y S, respectivamente. Nótese que los PCI simples no admiten complejidad de ensamble, por lo que su complejidad de forma es idéntica a su complejidad de tipo.

Ahora bien, la complejidad de forma de los PCI simples se tienen que normalizar al dividir sus PR entre la máxima PR de los PCI compuestos, lo que lleva a valores de complejidad de forma de 0.3333, 0.6369 y 0.5136 para los pares R, H y P, respectivamente.

En suma, la complejidad de los seis PCI, en orden ascendente, es de 0.1667, 0.2573, 0.3188, 0.5906, 0.8333 y 1.000 para los pares R, H, P, C, F y S, respectivamente.

Algunas aplicaciones de estos conceptos en el ámbito del diseño de mecanismos se encuentran disponibles en el trabajo de Khan y Angeles antes citado.

5 Conclusiones

Se introdujo el concepto de complejidad en el diseño técnico, con especial atención al diseño mecánico. Para esto se recurrió a dos conceptos tomados, uno, de la teoría matemática de las comunicaciones, la entropía, y el otro, de la ingeniería robusta propuesta por Taguchi. En este sentido, se introdujo el concepto de pérdida de regularidad para evaluar la complejidad de los PCI a través de la *superficie envolvente* a la que están asociados.

Agradecimientos

Los resultados que se incluyen en este trabajo han sido logrados en gran medida gracias a los fondos otorgados al autor mediante la Cátedra James McGill de Ingeniería Mecánica.

Referencias

- Angeles, J., 2005, “An innovative drive for wheeled mobile robots”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, **10**, No. 1, pp. 43–49.
- Cherry, C., 1982, *On Human Communication. A review, a Survey, and a Criticism*, 3a. edición, The MIT Press, Cambridge, MA.
- French, M., 1992, *Form, Structure and Mechanism*, Springer-Verlag, Londres.
- Gfrerrer, A., Lang, J., Harrich, A., Hirz, M. y Mayr J., 2011, “Car Side Window Kinematics,” *Computer-Aided Design*, **43**, No. 4, pp. 410–416.
- Hartenberg, R.S. y Denavit, J., 1964. *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York.
- Hervé, J.M., 1999, “The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, pp. 719–730.
- Khan, W.A. y Angeles, J., 2007, “The role of entropy in design theory and methodology”, *Proc. CDEN/C2E2 2007 Conference*, Winnipeg, Alberta, 22–24 de julio.
- Khan, W.A. y Angeles, J., 2011, “A novel paradigm for the qualitative synthesis of simple kinematic chains based on complexity measures”, *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, **3**, No. 3, pp. 031010-1–031010-11.
- McQuarrie, D.A. y Simon, J.D., 1999, *Molecular Thermodynamics*, University Science Books, Sausalito, California.
- Pahl, G., Beitz, W., Feldhusen, J. y Grote, K.H., 2007, *Engineering Design: A Systematic Approach*, Third Edition, Wallace, K.M. and Blessing, L. (traductores y redactores), Springer-Verlag London Ltd., Londres.
- Shannon, C.E. y Weaver, W., 1998, *The Mathematical Theory of Communication* (originalmente publicado en 1949 por Shannon), University of Illinois Press, Urbana y Chicago.
- Suh, N.P., 1990, *The Principles of Design*, Oxford University Press, Nueva York.
- Suh, N.P., 2001, *Axiomatic Design. Advances and Applications*, Oxford University Press, Oxford.
- Szilard, L., 1929, “Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System beim Eingriffen intelligenter Wesen” (Sobre la reducción de la entropía en un sistema termodinámico mediante la intervención de un ser inteligente), *Zeitschrift für Physik*, **53**, pp. 840–856.
- VDI, 1993, *Richtlinie 2221: Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte* (Metodología para el Desarrollo y el Diseño de Sistemas y Productos de Ingeniería), VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Wiener, N., 1948, *Cybernetics*, The Technology Press of M.I.T. y John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.